（西暦）２０１０年度　重点領域研究　実績報告書

提出日：2011 年　3 月 31 日

重点領域名	10d 「数理・物理等基礎科学を中心とした未来開拓科学」		
研究課題名	非線形偏微分方程式研究		
プロジェクト研究所名	非線形偏微分方程式研究所		
研究代表者名	柴田　良弘	主本属箇所名	理工学術院

１．研究計画に基づく進捗状況

下欄には、**当該年度**の研究活動状況について、その具体的な内容を、公募申請書に記載した「研究計画」に照らし、記載してください。特に、「研究計画」の「研究グループの形成」、「研究方法」について、計画通り（上回って）進捗した点、進捗しなかった点をそれぞれ分けて記載してください。

（※枠内でご記入ください。）

１）マクロな視点にたった流体の数学解析

１－１）定常解研究　(計画通りである).

非線形楕円型システムに対する正値解の存在問題に対してスカラー場の方程式に関してよく知られた Berestycki-Lions の存在定理に対応する結果を得た．そのさい，augmented functional を用いる新たなアプローチを与えた．具体的には Fitz-Hugh-Nagumo 方程式に関しても議論を展開したがその方法は他の方程式系に対しても適用可能である.本年度はここまでである.この方法は Navier-Stokes 方程式の定常解の存在については全く新しい方法であり，来年度以降にこの方法の流体方程式への拡張を考える.

１－２）安定性研究　(計画通り)

まず騒音問題などの工学的問題の数学的基礎づけを与えるため,流体力学における流れの安定性理論の現状をレビューし，その問題点と課題を抽出した．層流は Reynolds 数が増加すると不安定になることが知られているが,せん断流れの不安定には二つのタイプがあることが実験的に確認されている．一つは不安定性から生じる渦が外乱に影響される場合で”Noise Amplifier”と形容されるタイプ,もう一つはその渦が外乱に影響されない固有の振動数をもつ場合で”Flow Oscillator”と形容されるタイプである.Ecole Polytechnique 流体力学研究所のグループは,この二つのメカニズムを平行流近似に基づく対流不安定・絶対不安定の概念をもとに説明することを試みているが幾つかの異論も提案されており明確な結論は得られていない.本研究では,この議論に明確な回答を与えることを一つの目標としている.本年度はその第1歩として Ecole Polytechnique 流体力学研究所のグループによる理論の問題点を詳細に検討した.またこれを基に擬微分作用素,Fourier 積分作用素による解の表示に基づく解析手法の検討に入った.

また層領域における Navier-Stokes 方程式を Sobolev 空間および Besov 空間の枠組みで研究し,Poiseuille 流が Besov 空間に属する解として特徴づけられることを示した．また 2 次元外部領域における定常 Navier-Stokes 方程式を領域および外力に対称性を仮定して考察し,小さい定常解が一意的に存在するための外力および境界値についての十分条件を与えた．さらにこの定常解が小さいとは限らない摂動について安定であることを示した.

１－３）混相流研究(計画通り)

１．研究計画に基づく進捗状況（つづき）

理論的には最大正則性原理とレゾルベント評価を同時に証明する，R-有界性に基づくこれまでにない新しい方法を開発した．さらに線形化問題を一般領域で考察することに成功した．これにより無限に長い円環中の無限個の分子の運動などを数学的に厳密にとらえる基礎づけが出来た．

数値解析の視点からは，特性曲線有限要素法を適用しエネルギィ安定性を維持できるスキームを開発した．対称行列の枠組みでの計算が出来るようになり，解法の高速化が実現できた．既存のスキームでは質量保存性は成立しなかったが，本研究で開発した特性曲線有限要素法では移流拡散方程式に対してはそれを維持する優れた特徴をもつ．次年度ではNavier-Stokes 方程式へ応用する．また砂時計形状で密度の重い流体が落下する現象の数値シミュレーションを行い，滑り境界条件と粘着境界条件，密度差の大小が流動形状に及ぼす影響を定量的かつ定性的に詳細に調べた．

１－４）分散型方程式研究(計画通り)

Schrödinger 方程式の特異摂動問題に関し，従来の有限次元近似を用いる方法ではなく，直接無限次元での方法による新しい方法により極限問題の解の一意性，非退化性を仮定することなく，1 点に複数個のクラスターピークを持つ解の構成に成功した．また部分的粘性効果の入った磁気流体の運動方程式の大域解を空間 2 次元で証明した．さらに 3 波相互作用の非線形シュレディンガー方程式の解の解析性について平滑化効果の枠組みで研究した．

２）メゾの視点にたった流体研究（計画通り）

キャビテーションに代表される混相流は，Navier-Stokes 方程式によるマクロな視点に加えて，気泡に関わるミクロからマクロに至るダイナミクスの理解が不可欠となる．今年度は，流体運動をミクロからマクロまでの視点を通して理解するために，①分子動力学の手法による気泡の生成崩壊機構の理解，②粒子法による Navier-Stokes 方程式の Lagrange 記述による解析法の開発，③Navier-Stokes 方程式から導かれる級対称な気泡ダイナミクスに関する Rayleigh-Plesset 方程式による解析を行った．①については，分子動力学による数値解析プログラムを開発し，Lennard-Jones ポテンシャルをもとに，気泡の生成崩壊過程を解析した．②の粒子法についても数値解析ツールを開発し自由表面問題である水柱崩壊のベンチマークテストを行った．③に関しては，Rayleigh-Plesset 方程式に高周波の外部励振を加え，ナノバブルにみられるような微小気泡が安定に存在することを数値解析で確認することが出来た．これらの研究を数学的に厳密なレベルに引き上げるために，本研究では大域幾何学的視点からの研究を行うことが他の研究機関（外国も含む）と全く発想をことにするところであるが，今年度は理想流体の Euler 方程式を基礎に，Euler-Poincaré 簡約の理論により，陰的な Euler-Poincaré 方程式による流体方程式の定式化を行った．

その他：非線形偏微分方程式研究の中心地となるべく，研究集会，ミニコース，通常の研究会を積極的に行い，国内外の多くの参加者を得ている．一方本研究の目玉といえるメゾの視点からの研究をさらに飛躍させるには混相流実験をより詳細にとらえる高速度カメラを装備することが必要不可欠である．このため私立大学戦略的研究基盤形成支援事業に応募中である．また数学と企業の連携も研究所，ひいては早稲田数学の発展に重要である．これについても数学・産業界連携セミナーを行い，また A-Step への応募の準備を行っている．