

(西暦) 2011年度 重点領域研究 実績報告書

提出日：2012年3月30日

重点領域名	10d 「数理・物理等基礎科学を中心とした未来開拓科学」		
研究課題名	非線形偏微分方程式研究		
プロジェクト研究所名	非線形偏微分方程式研究所		
研究代表者名	柴田良弘	主本属箇所名	理工学術院

1. 研究計画に基づく進捗状況

下欄には、**当該年度**の研究活動状況について、その具体的な内容を、公募申請書に記載した「研究計画」に照らし、記載してください。特に、「研究計画」の「研究グループの形成」、「研究方法」について、計画通り(上回って)進捗した点、進捗しなかった点をそれぞれ分けて記載してください。
(※枠内でご記入ください。)

1) マクロな視点にたった流体の数学解析

1-1) 定常解研究 (計画通りである)

- ・非線形楕円型方程式系に対して、領域の大きさを特徴づけるパラメタに関して不変な楕円型評価を得た。
- ・物体周りの乱れの初生に関して、2次元外部領域における $Oseen$ 方程式を境界要素法の手法で定式化し直し、数値計算によって円周周りの定常解を求め、解析解との一致を確認した。さらに楕円周りの定常解を計算し、実験でみられる後流渦を定性的に再現することに成功した。
- ・圧縮性粘性流体の熱対流問題の解析的取扱いは、その質量保存則の非線形性からくる困難のためにこれまでほとんど手がつけられていなかった。今年度熱伝導解の摂動にたいして臨界 Rayleigh 数を超えない時の平衡定常解の存在証明と Rayleigh 数が臨界 Rayleigh 数を超えたときに定常分岐によるパターン形成が起こっていることを証明した。

1-2) 安定性研究 (計画通り)

空力騒音の発生メカニズムの一つとして流れの中におかれた物体から放出される渦によるものが知られている。この渦は物体後流の不安定性により発現するものである。数学的には Navier-Stokes 方程式の定常解の周りで線形化した変数係数の低階項をもつストークス方程式で記述される。今年度はこの偏微分作用素に対して $parametrix$ を形式的に構成し、近似解の積分表示を求めた。これをもとにした数値解析は来年度の課題である。

R-有界性の概念を圧縮性粘性流体の数学的研究に導入し、一般領域における圧縮性粘性流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式の時間局所解の存在と、一般領域における、時間大域解の存在を示した。これにより粘着境界条件のときの圧縮性粘性流体の流れの安定性に対する新しい研究方法が導入された。

1-3) 混相流研究 (計画通り)

- ・相転移がある場合の気液二相流の混相流の数学的定式化を行い、線形化問題の解の最大正則性原理を示し、その応用として非線形問題の時間局所的一意解の存在を示した。

1. 研究計画に基づく進捗状況 (つづき)

・気液二相流などの混相流問題は、流体問題に共通な非線形性と、自由境界と表面張力の非線形性を含み、理論解析では上記のような時間局所解の存在結果を得ることが大半である。数値解析でも非常に困難な問題である。本研究ではエネルギー安定特性曲線有限要素スキームを改良し、流体の分離、併合が計算できる汎用スキームを作成した。またこれを用いた流体の分離・併合現象を砂時計形状の領域で捉えた。

1-4) 分散型方程式研究 (計画通り)

・非線形 Klein-Gordon 方程式については、空間 2 次元の臨界 Strichartz 評価を与えることで、解のクラスとして従来知られていた関数空間を格段に拡張できた。

・非線形 Schrödinger 方程式に関する特異摂動問題に対する解の構成を有限次元近似を経ずに無限次元での議論によりその証明、存在定理の拡張を行った。特に、Allen-Cahn type の非線形性などにも適用できる、非常に広い非線形性に対応できる存在結果を得た。またポテンシャル $V(x)$ の鞍点に凝集する解および $V(x)$ の極大点に集中する clustering peaks を持つ解の構成に成功した。また従来取り扱われてこなかった質量共鳴の場合を研究し、ガリレイ変換の生成作用素が適切に作用する事情を解明し、空間 3 次元以上において小さなデータに対する散乱理論を構築できた。

2) メゾな視点にたった流体の数学解析 (実験観測は計画以上に進歩)

・混相流実験を詳細にとらえるため、100 万コマ/sec の高速度カメラを CREST の予算で購入し、山本勝弘のチームにより実験観測が行われた。その結果、キャビテーションジェットの高速度挙動は、まずノズル出口から下流へキャビテーションジェットが成長し、その長さが最大に達すると気泡雲に分裂すること、その後各気泡雲は、数回収縮・膨張を繰り返して消滅することが分かった。シャドウグラフから気泡雲の収縮膨張の周期は約 100-200 [μm] となり、またシュリーレン写真より収縮時に高輝度の圧力波紋が拡大伝播する様子が観測された。一方噴流周囲でハイドロフォンにより検出された圧力パルスの発生頻度は 1-10 [kHz] の範囲であることが分かった。これらの実験から、圧力パルスは気泡雲が最少となる数 μs 前に発生することを見出した。

・上記の実験での気泡雲の収縮・膨張を数学的に定式化するために、Rayleigh-Plesset 方程式の数値解析を行い、半径が大きくなると解がカオス的な挙動を示すこと、また外力の振動数を上げると挙動が安定することを示した。さらに気泡半径が細かいリバウンドを繰り返しながら最大半径に戻っていくことを、レイリープレセット方程式に音速を考慮したケラー m 出るでの数値シミュレーションと高速度カメラによる実験観測により確認した。

その他:

・非線形偏微分方程式研究の中心地となるべく、流体数学セミナー、応用解析研究会等の通常の研究会を積極的に行った。また学振の事業である日独共同大学院プログラムによる第 4 回日独共同流体数学国際会議と日独 2 国間交流シンポジウム：Conference on Evolution

Equations Related Topics & Applications を主催した。

・数学と企業の連携も研究所、ひいては早稲田数学の発展に重要である。これについても数学・産業界連携セミナーを恒常的に行っている。