これまでの研究の総括*

（１）マクロレベルでの流体数学研究

１．非圧縮性粘性流体の自由境界問題について：

液滴落下問題、海の表面の自由運動に関する非圧縮性粘性流体の自由境界問題は、従来 L_2 またはヘルダー空間の枠組みで Solinnikov, Padula, Beale, Nishida, Tani, Tanaka, Hataya 等により時間局所解の一意存在、小さな初期値（液滴落下問題ではさらに領域が球に近い場合）の時間大域的な解の一意存在が知られていた。本研究では次の結果を示した。

（１－１） 表面張力が無い場合、一般領域で流速に関して時間 L_p 空間 L_q の最大正則性原理が成立する関数空間のクラスでの時間局所解の存在を示した。 [1]柴田

（１－２） 表面張力が無く、初期領域が有界で、初期値が十分小さかつ剛体運動に直交する場合に、時間大域的解の一意存在を示した。[1]柴田

（１－３）半空間からの摂動問題として底なしの場合で、表面張力がある場合の海の表面の自由運動に関する問題について時間大域的解の一意存在を初期値が十分小さい場合に示した。 [2]齋藤-柴田

より詳しく述べると、結果(１-１)では初期領域は N 次元ユークリッド空間内の一様 $W_q^{2-1/q}$ 領域（$N < q < \infty$）で、weak Dirichlet-Neumann 問題が一意可解であるとする。有界領域、半空間、摂動半空間、層領域、摂動層領域、チューブなどはこの条件を満たす。$L_p((0,T),W^2_q) \cap W_p^1((0, T), L_q)$ $(2/p + N/q <1)$ が流速のクラスである。この結果は上記の液滴落下問題、海の表面の自由運動に関する結果を表面張力が無い場合に含む統一理論を与えている。証明の鍵は Lagrange 変換を用いて固定境界の問題の場合に帰着し、その際得られる線形化問題の解の最大 L_p 時間 L_q 空間最大正則性原理を示し（[3]柴田）Banach の不動点定理を用いて示す。指数 p, q は一般に異なってもよい。結果(１－２)は Solonnikov により p=q の場合にエネルギィー評価を Euler 座標で求め解の延長を議論していく複雑な方法で示されていたが、本研究では線形化問題の解の指数減衰に関する定理を示し、初期値が回転運動に直交するときに指数減衰することを示して解を時刻無限まで延長できることを示した。解の指数減衰は Solonnikov においても示されていたが、線形問題に対する指数減衰定理を示したのは本研究が初めてである。結果(１－３)の証明としてまず線形化問題として得られる半空間のストークス方程式の自由境界条件の解の L_p-L_q 減衰評価を求める。非線形問題においてはこれを応用して解とその１階微分の空間 L_q ノルムの時間減衰評価をもとめるが非線時間減衰は十分ではないので、解を求めるための iteration scheme を閉じさせるために時間指数 p を十分大きくとる。この研究により初めて先行研究が時空間 L_2 枠でしか示すことのできなかった結果を時間 L_p 空間 L_q の最大正則原理の成立する枠で時間大域解の存在が示せた画期的な研究である。p,q を異なるようにとり、最大 L_p-L_q 正則性原理と解の L_p-L_q 減衰定理を組み合わせる方法は非有界領域での準線形放物型方程式の時間大域解の一意存在を示すという方法に大きな進展を与えることができた。

* 科研費基盤Ｓ「流体現象のマクロ構造とメゾ構造解明のための解析理論の構築」の報告書を一部改編

２．圧縮性粘性流体の有界領域で non-slip 条件の場合に時間大域的解の一意存在について:
[4]榎本-柴田　ここで質量は $L_p((0, T), W_q^1) \cap W_p^1((0, T), L_q)$、 流速は $L_p((0, T),W_q^2) \cap W_p^1((0, T), L_q)$ $(2/p + N/q <1)$に属する。証明は対応する線形問題に対し解析半群を生成し、質量項が平均ゼロである空間で指数減衰することを示す、非線形問題においては定数を除いた質量項と流速が指数減衰するようなクラスで iteration scheme を構成するというこれまでにない方法により解の所求の結果を示した。

３．圧縮性粘性流体の自由境界問題について：
（３－１）　表面張力が無い場合、一般領域で流速に関して時間 L_p 空間 L_q の最大正則性原理が成立する関数空間のクラスでの時間局所解の存在を示した。[5]榎本-von Below-柴田
（３－２）　表面張力が無く、初期領域が有界で、初期値が十分小さかつ剛体運動に直交する場合に、時間大域的解の一意存在を示した。[6]柴田
　より詳しく述べると、結果（３－１）では初期領域は N 次元ユークリッド空間内の一様 $W_q^{2-1/q}$ 領域（$N < q<\infty$）とする。有界領域、半空間、摂動半空間、層領域、摂動層領域、チューブなどはこの条件を満たす。質量は $L_p((0, T), W_q^1) \cap W_p^1((0, T), L_q)$、流速は $L_p((0, T),W_q^2) \cap W_p^1((0, T), L_q)$ $(2/p + N/q <1)$ に属する。この結果は１の非圧縮性粘性流体の場合の圧縮性粘性流体への拡張を与えているが、その違いは圧縮性の場合はバトロトピック流体を仮定しているので、圧力からくる空間の仮定がいらないことにある。証明の鍵は Lagrange 変換を用いて固定境界の問題の場合に帰着し、その際得られる線形化問題の解の最大 L_p 時間 L_q 空間最大正則性原理を示し、Banach の不動点定理を用いて示す。指数 p, q は一般に異なってもよい。(３－２)は線形化問題の解の指数減衰に関する定理を示し、初期値が回転運動に直交するときに指数減衰することを示して解を時刻無限まで延長できることを示す。このように最大正則性原理の枠で圧縮性粘性流体の可解性を扱った研究はこれまでになく、今後の研究に新展開を与える。
　以上すべての研究は、これまでの研究と全く異なる方法論に基づき最良の結果を与えるものであり、独創的かつ新規的であり、今後の流体数学研究を各段に発展させるものである。

[1] Y. Shibata, On some free boundary problem of the Navier-Stokes equations in the maximal Lp-Lq regularity class, J. Differential Equations, to appear.
[2] H. Saito, Y. Shibata, On decay properties of solutions to the Stokes equations with surface tension and gravity in the half space, J. Math. Soc. Japan, to appear.
[3] Y. Shibata, On the R-boundedness of solution operators for the Stokes equations with free boundary condition, Differential Integral Equations, 27,pp.313--368, 2014.
[4] Y. Enomoto, Y. Shibata, On the R-sectoriality and the initial boundary value problem for the viscous compressible fluid flow, Funkcial. Ekvac., 56, pp. 441―505, 2013.

[5] Y. Enomoto, L. von Below, Y. Shibata, On some free boundary problem for a compressible barotropic viscous fluid flow, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat., 60, pp. 55--89, 2014.
[6] Y. Shibata, On the global well-posedness of some free boundary problem for a compressible barotropic viscous fluid flow, In the Contemporary Mathematics Series of the American Mathematical Society: Recent Advances in PDEs and Applications, to appear.

（２）メゾレベルでの流体数学研究：

メゾ構造研究グループでは、微小気泡が多数集合して気泡雲として振る舞う複雑な多重スケール現象であるキャビテーション現象の解明に向けて、まず単一の微小気泡の運動を確率微分方程式によってモデル化することを試みた。その中で次の結果を示した。[1]舟木-大縄-鈴木-横山

①非圧縮の液体の中にある単一気泡の運動を支配する Rayleigh-Plesset 方程式に対してそのエネルギー関数を見出し、それに基づいて Rayleigh-Plesset 方程式の時間大域解の存在と漸近挙動の性質を明らかにした。
②Inoue-Funaki の研究を参考にして Rayleigh-Plesset 方程式に試験的なランダム項を導入し、その結果として得られる（伊藤型の）確率微分方程式を導出した。またその確率微分方程式の大域解の存在と一意性を示すことに成功した。

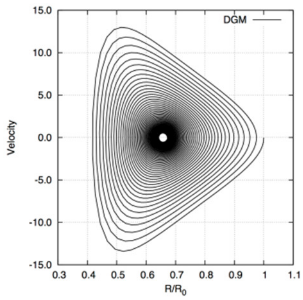
また予備的な結果として

・上記のエネルギー関数を用いると非粘性の Rayleigh-Plesset 方程式は Hamilton 系として表すことができる
・対応する Lagrangian を用いて変分原理により Rayleigh-Plesset 方程式を導出することができる

ことを見出した。さらに d'Alembert の原理によれば、これに粘性が加わった場合も考慮することが可能である。そこで Rayleigh-Plesset 方程式にランダム項を導入する理論的にも満足のいく方法として、この変分原理に基づくものを考案した。具体的には、Lagrangian の運動エネルギーの部分にランダムな速度を加え、Lagrange-d'Alember の変分原理をその Lagrangian に適用するにことよって Stratonovitch 型の確率微分方程式を導出し、最後に伊藤の公式を用いることによってそれを伊藤型の確率微分方程式に変換した。この確率微分方程式に対して試験的な数値計算を行い、精密に行われた実験と比較してその有効性を確認した。

一方、正準の Hamilton 系に対してはその symplectic 構造を保つような数値計算が可能である。上に述べた非粘性 Rayleigh-Plesset 方程式の Hamilton 系に対してそのような数値解法である symplectic スキームを適用し、数値計算においてエネルギーが精度良く保存されることを確認した。さらに、粘性を伴う Rayleigh-Plesset 方程式と音波の放出を考慮

して一般化した Rayleigh-Plesset-Keller 方程式に対しては Hamiltonian の勾配に作用する作用素が歪対称の symplectic 作用素と散逸効果を表す負定値の対称作用素の和として表されることを見出し、それに離散勾配法を適用することによってエネルギーが正しく減衰するような数値計算手法を開発した。その結果として、例えば理論解析で予測される平衡点への漸近挙動を常に正しく計算することができる（下図参照）。[2]大縄･及川･鈴木



[1] T. Funaki, M. Ohnawa, Y. Suzuki, S. Yokoyama, Existence and uniqueness of solutions to stochastic Rayleigh-Plesset equations, J. Math. Anal. Appl.,No.425, pp.20-32,2015.
[2] M. Ohnawa, I. Oikawa, Y. Suzuki, Mathematical and numerical analysis of the Rayleigh-Plesset and Keller equations, in preparation.

混相流研究グループの有限要素法に関する研究では、Navier-Stokes 方程式の自由境界問題を対象に、数学理論を基盤とした高信頼・高精度な有限要素法の開発を行った。物質微分項の非線形性は Lagrange-Galerkin 法で解消し、自由境界は界面追跡法で精度良く計算するスキームを構成した。さらに、エネルギーの意味で安定的になるように、新たな工夫を加えた。このようにして得られたスキームは、係数行列は対称になるという特別な性質をもっている。計算コストおよび効率は、従来の非対称行列が現れるスキームより格段に優れており、実用性の観点からも非常に優れているといえる。本研究のように、数学的に安定性が保証され、尚かつ実用性も兼ね備えたスキームを研究開発した例は他に類を見ない。このスキームを気泡上昇問題に適用し、有効性の検証を行った。外部流体の粘性を下げていくと上昇する気泡が振動する現象を捉えることができた。これは、円柱周りの流れで Reynolds 数を上げていくとカルマン渦列ができることに対応する現象である。

メゾレベルからの粘性流体の運動方程式の導出方法として、次のプログラムを提案する。
１）確率的な摂動を形式的に与えた流速を考える。
２）この上で運動エネルギィーとポテンシャルエネルギィー及び viscous force を定義する。
３）Lagrange-d'Alembert 原理による変分を行い確率項を含む運動方程式を導出する。
４）確率項を数学的に厳密にとらえるための Stochastization を行い、Stranovitch 型から Ito 型の確率偏微分方程式を導出する。
以上が確率項を含む粘性流体方程式の導出方法である。
現時点では、上に述べた通り単一気泡の運動を記述する確率項を含む Rayleigh-Plesset 方程式の導出に成功し、またこの方程式を基盤とする数値解析を行って実験結果と非常によくあっていることを確認した。

早稲田大学は 2014 年度より文科省のスーパーグローバル大学創生支援に採択され、数物系は柴田をリーダーとして拠点の一つとなった。ここではこれまでの流体数学に加え、量子力学、生物物理、物性物理を新たなる対象とする数学研究、モデリング、シミュレーションを研究組織に加え、現在上記の確率微分方程式の導出方法で特に生物物理や、物性に関する方程式の導出と実験観測との整合性を検討中である。